

Probleme care se rezolvă cu ajutorul funcției de gradul al doilea

Problema 1. – Ex.25637 Gazeta Matematică nr. 10/2006

- a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuația:
 $(2m+3)x^2 - 6x + (2m+3) = 0$
să admită rădăcinile reale x_1, x_2 .
b) În ce condiții $x_1 \in (0, 3)$, $x_2 \in (0, 3)$?

Rezolvare:

a) Deoarece $\Delta = 36 - 4(4m^2 + 12m + 9) = -16(m^2 + 3m)$, rezultă că $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ dacă și numai dacă $\Delta \geq 0$, de unde $m \in [-3, 0]$

b) Cum $x_1 \cdot x_2 = 1 > 0$, rezultă că $x_1 > 0$ și $x_2 > 0$ deci $x_1 + x_2 = \frac{6}{2m+3} > 0$, de unde obținem
 $m \in \left(-\frac{3}{2}, +\infty\right), (1).$

Deoarece $x_1 < 3$ și $x_2 < 3$ rezultă că $x_1 - 3 < 0$ și $x_2 - 3 < 0$, condiții care se realizează dacă $(2m+3)(20m+12) > 0$, de unde $m \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{5}, +\infty\right), (2).$

Ținând cont că $m \in [-3, 0]$, din (1) și (2) rezultă că $x_1, x_2 \in (0, 3)$ dacă și numai dacă $m \in \left(-\frac{3}{5}, 0\right]$.

Problema 2. – Ex.25678 Gazeta Matematică nr. 12/2006

Determinați toate funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, care au proprietatea:
 $x^2 \cdot f(x) + f(2-x) = 2x^3 + x^2 - 2x + 5, \forall x \in \mathbb{R}.$

Rezolvare:

Înlocuim pe x cu $2-x$ și obținem
 $(2-x)^2 \cdot f(2-x) + f(x) = 2(2-x)^3 + (2-x)^2 - 2(2-x) + 5.$
Eliminând pe $f(2-x)$ din cele 2 relații rezultă $f(x) = 2x + 1.$

Problema 3. – Ex.25558 Gazeta Matematică nr. 6/2006

Fie ecuația $(m-1)x^2-2mx+m-2=0$, $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, cu rădăcinile x_1 și x_2 .

- a) Pentru ce $m \in \mathbb{R}$, $x_1 < 0$, $x_2 < 0$?
 b) Calculați $x_1 \cdot (x_2+1) + x_2 \cdot (x_1+1)$.
 c) Pentru ce $m \in \mathbb{R}$, $x_1 \in (-1,0)$, $x_2 \in (-1,0)$?

Rezolvare:

a) Se impune setul de condiții: $\begin{cases} x_1, x_2 \in \mathbb{R} \\ x_1 < 0 \\ x_2 < 0 \end{cases}$, adică, echivalent $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0. \\ S < 0 \end{cases}$.

Suntem astfel conduși la sistemul $\begin{cases} 3m-2 \geq 0 \\ \frac{m-2}{m-1} > 0 \\ \frac{2m}{m-1} < 0 \end{cases}$ care are soluția $m \in \left[\frac{2}{3}, 1 \right)$.

b) $x_1 \cdot (x_2+1) + x_2 \cdot (x_1+1) = 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_1 + x_2 = 2 \cdot \frac{m-2}{m-1} + \frac{2m}{m-1} = 4$.

c) Dacă $x_1, x_2 \in (-1,0)$, atunci $x_1 \cdot (x_2+1) + x_2 \cdot (x_1+1) < 0$, adică, conform cu b), obținem $4 < 0$, fals.

Prin urmare, nu există $m \in \mathbb{R}$, astfel încât $x_1, x_2 \in (-1,0)$.

Problema 4. – Ex.25857 Gazeta Matematică nr. 9/2007

Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația:

$$16x^3 - 13x + 3 = 0$$

Rezolvare:

$$\begin{aligned} \text{Avem } 16x^3 - 13x + 3 &= 16x^3 - x - 12x + 3 = x(16x^2 - 1) - 3(4x - 1) = \\ &= x(4x - 1)(4x + 1) - 3(4x - 1) \\ &= (4x - 1)(4x^2 + x - 3) \text{ și ecuația devine } (4x - 1)(4x^2 + x - 3) = 0 \end{aligned}$$

$$4x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

sau

$$4x^2 + x - 3 = 0$$

$$\Delta = 1 + 48$$

$$\Delta = 49$$

$$\begin{aligned} x_1, x_2 &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} \Rightarrow x_1 = \frac{3}{4} \\ &\Rightarrow x_2 = -1 \end{aligned}$$

Deci soluțiile acestei probleme sunt: $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, -1$.

Problema 5. – Ex.1 „A 11-A OLIMPIADĂ BALCANICĂ DE MATEMATICA PENTRU JUNIORI” - Shumen, Bulgaria, 25-30 iunie 2007

Fie a real pozitiv, astfel încât $a^3=6(a+1)$. Demonstrați că ecuația:
$$x^2+ax+a^2-6=0$$
nu are soluții reale.

Rezolvare:

Trebuie arătat că discriminantul ecuației $x^2+ax+a^2-6=0$, anume $\Delta=a^2-4(a^2-6)=3(8-a^2)$, este strict negativ. Într-adevăr, în caz contrar avem $a^2 \leq 8$; cum $a>0$ rezultă $a^3 \leq 8a$. Dar $a^3=6a+6$, deci $6a+6 \leq 8a$. Obținem $a \geq 3$, în contradicție cu $a^2 \leq 8$.

Remarcă.

Să notăm $P(x)=x^3-6x-6$, $Q(x)=x^2+ax+a^2-6$. Se vede imediat că $P(x)=(x-a)Q(x)+P(a)$, deci $P(x)=(x-a)Q(x)$. Înseamnă că $P(x)$ nu are soluții reale diferite de a .

Cum $P(0)=-6<0$ și $P(3)=3>0$, rezultă că există o soluție reală pozitivă pentru $P(x)=0$, deci aceasta este cu necesitate a , așadar condiția de pozitivitate din enunț este inutilă.

Prof. coordonator Adriana Petrovici